8 класс. Районный тур 2016-2017. Решения.

Вариант 1

Задача 1. День рождения

Когда мальчик делает уроки на компьютере, мощность тепловыделения процессора ($P_{\text{уроки}}$) меньше, чем когда он играет ($P_{\text{игры}}$). В каждом случае температура процессора устанавливается так, чтобы мощность тепловыделения сравнялась с мощностью теплоотдачи системы охлаждения ($P_{\text{охл}}$). В условии говорится, что мощность системы охлаждения пропорциональная разности температур процессора и воздуха в комнате. Тогда отношение этих разностей температур для случая, когда мальчик играет и делает уроки даст отношение мощностей тепловыделения процессора. Значение этих мощностей не меняется от качества работы системы охлаждения, тогда обозначив за T_x искомую температуру мы можем записать отношение так

$$\frac{T_x - 20°C}{50°C - 20°C} = \frac{60°C - 20°C}{30°C - 20°C},$$

откуда находим $T_x = 140°C$, значит компьютер перегревается, и мальчик не сможет поиграть.

Более строго ответ можно получить следующим образом. То что мощность системы охлаждения пропорциональна разности температур запишем так:

$$P_{\text{охл}} = \alpha \cdot (T - T_0)$$

здесь T — температура процессора, T_0 — комнатная температура, а α — некоторый неизвестный коэффициент пропорциональности.

Теперь запишем уравнения теплового баланса в случае, когда система охлаждения работает в штатном режиме:

$$P_{\text{уроки}} = \alpha \cdot (T_{\text{у}} - T_0)$$
$$P_{\text{игры}} = \alpha \cdot (T_{\text{и}} - T_0)$$

Когда система охлаждения стала работать хуже, изменился коэффициент пропорциональности (будем называть его $\varkappa$). Значит уравнения теплового баланса после неисправности записываются как:

$$P_{\text{уроки}} = \varkappa \cdot (T'_{\text{у}} - T_0)$$
$$P_{\text{игры}} = \varkappa \cdot (T'_{\text{и}} - T_0)$$

Нагрузка на процессор в каждом из режимов осталась прежней. Приравняем выражения для мощностей до и после поломки:

$$\varkappa \cdot (T'_{\text{у}} - T_0) = \alpha \cdot (T_{\text{у}} - T_0)$$
$$\varkappa \cdot (T'_{\text{и}} - T_0) = \alpha \cdot (T_{\text{и}} - T_0)$$

Выразим из этой системы $T'_{\text{и}}$

$$T'_{\text{и}} = T_0 + (T_{\text{и}} - T_0) \cdot \frac{\alpha}{\varkappa} = T_0 + (T_{\text{и}} - T_0) \cdot \frac{T'_{\text{у}} - T_0}{T_{\text{у}} - T_0}$$

Подставляя значения из условия получаем

$$T'_{\text{и}} = 140°C$$

Значит компьютер перегревается, и мальчик не сможет поиграть.

Задача 2. Светофоры

Будем решать задачу при помощи графика. Нарисуем координатную плоскость $S(t)$, на которой по оси ординат отложена координата вдоль дороги от дома Порфирия, а по оси абсцисс – время от начала его движения. На этой плоскости для каждого светофора отметим промежутки времени, когда на них горит красный свет, они будут иметь вид горизонтальных отрезков (см. рис.).

Так как скорость по условию должна быть постоянна, значит координата машины зависит от времени как:

$$S = vt.$$

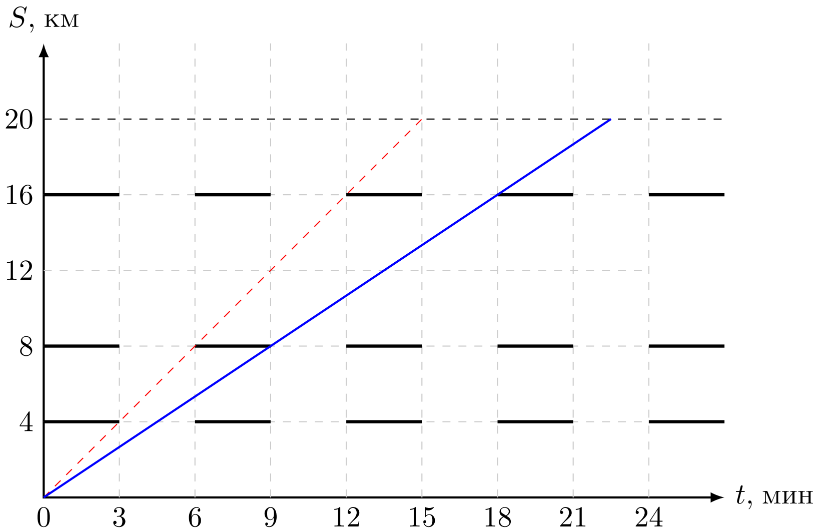
На графике такой зависимости будут соответствовать прямые, проходящие через ноль. Порфирий может проезжать только на зеленый свет, а значит прямая не должна пересекать ни один из проведенных отрезков. Первый возможный вариант отмечен на картинке красным пунктиром, однако он не подходит, так как скорость получается равной

$$v = \frac{16\text{ км}}{12\text{ мин}} = 80\text{ км/ч}$$

Следующий вариант — прямая, проходящая через точку с координатами $(9, 8)$. Скорость на этой прямой получается равной

$$v = \frac{16\text{ км}}{18\text{ мин}} \approx 53\text{ км/ч}$$

Скорости между 80 км/ч и 53 км/ч нам, очевидно, не подходят, так как соответствующие им прямые проходят через отрезок, отвечающий второму светофору.



Эту задачу также можно решить, если для каждого светофора найти диапазон допустимых скоростей в каждом из «просветов». Затем найти минимальную скорость, которая удовлетворяет всем промежуткам.

Задача 3. Голодные игры

С увеличением линейных размеров тела в k раз, его объем возрастает в k^3 раз. Это легко проверить для кубика. Поскольку любую объемную фигуру можно разбить на маленькие кубики, такое же правило выполняется и для тел произвольной формы. Важно только, чтобы при увеличении тело оказалось подобным начальному.

Это же можно понять из соображений размерности. Линейный размер тела определенной формы l имеет размерность **длины**, тогда как объем V имеет размерность **длина**^{3}. Значит, увеличивая линейные размеры тела в k раз, его объем изменится в k^3 раз. Можно записать так $V \sim l^3$.

Для морковки формы конуса линейным размером является ее длина $l_{\text{морковка}}$. Часть морковки, которую съел заяц, начинавший с тонкого конца, имела так же форму конуса, но длину $l_1 = \frac{1}{3} l_{\text{морковка}}$. Исходя из сказанного выше, объем съеденной части тогда равен $V_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot V_{\text{морковка}} = \frac{1}{27} \cdot V_{\text{морковка}}$.

Морковка однородна, значит объемы относятся так же как и массы, поэтому заяц поправился всего лишь на 1 г морковки.

Задача 4. Шары в воде

Заметим, что раз в воздухе система находится в равновесии, то все силы тяжести по правилу рычага относительно подвеса O уравновешивают друг друга. Значит после того как гантелю погрузят в воду, суммарно все силы тяжести так же не будут вращать систему вокруг шарнира O. Поэтому, записывая правило рычага для погруженной системы, будем учитывать только силу Архимеда. Стержень симметричен, значит сила Архимеда приложена к его середине. То есть плечо силы Архимеда, действующей на тело равно l. Тогда правило рычага выглядит следующим образом:

$$5\rho_{\text{в}} V g \cdot l = \rho_{\text{в}} V_{\text{ст}} g \cdot l + \rho_{\text{в}} V g \cdot 3l$$

Отсюда выразим объем стержня

$$V_{\text{ст}} = 2V$$

Задача 5. Танкер

Чтобы сжечь наименьшее количество нефти, добираясь до порта, надо тратить на каждый километр пути минимально возможное количества топлива.

Пусть танкер идет некоторое время Δt со скоростью v, а соответствующий данной скорости расход равен Q_v. Тогда за это время будет потрачена масса топлива:

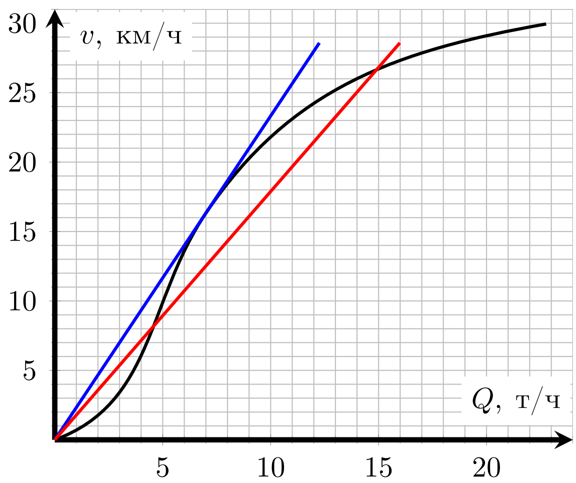
$$\Delta M = Q_v \cdot \Delta t.$$

Пройденное расстояние за это же время равно $\Delta l = v\Delta t$. Значит, расход топлива в пересчете на единицу пройденного пути μ будет равен:

$$\mu = \frac{\Delta M}{\Delta l} = \frac{Q_v\ \Delta t}{v\ \Delta t} = \frac{Q_v}{v}.$$

Таким образом, чтобы определить минимальный расход, надо найти из графика минимальное отношение Q/v.

Чтобы решить задачу графически, представим, что для определенного значения μ_0 мы провели прямую, выходящую из начала координат и проходящую через точку $(\mu_0, 1)$ (см. рис.). Несложно понять, что в каждой точке этой прямой соотношение Q/v равно μ_0. Причем, чем меньше μ_0, тем «круче» идет такая прямая. Тогда для решения задачи нам надо найти самую «крутую» прямую, которая имеет общие точки с графиком из условия.



Из рисунка видно, что искомая прямая идет по касательной к графику (синяя линия на рисунке), так как все остальные прямые, пересекающие график и выходящие из нуля, имеют меньший наклон (пример: красная линия на рисунке). Теперь из графика найдем расход топлива на единицу пройденного пути

$$\mu \approx 0{,}43 \text{ т/км}$$

Значит, чтобы добраться до порта, придется потратить

$$M = \mu L \approx 43 \text{ т}$$

Эту задачу также можно решить поиском на графике точки, имеющей минимальное значение Q/v.

Вариант 2

Задача 1. День рождения

Когда мальчик делает уроки на компьютере, мощность тепловыделения процессора ($P_{\text{уроки}}$) меньше, чем когда он играет ($P_{\text{игры}}$). В каждом случае температура процессора устанавливается так, чтобы мощность тепловыделения сравнялась с мощностью теплоотдачи системы охлаждения ($P_{\text{охл}}$). В условии говорится, что мощность системы охлаждения пропорциональная разности температур процессора и воздуха в комнате. Тогда отношение этих разностей температур для случая, когда мальчик играет и делает уроки даст отношение мощностей тепловыделения процессора. Значение этих мощностей не меняется от качества работы системы охлаждения, тогда обозначив за T_x искомую температуру мы можем записать отношение так

$$\frac{T_x - 20°C}{35°C - 20°C} = \frac{45°C - 20°C}{25°C - 20°C},$$

откуда находим $T_x = 95°C$, значит компьютер перегревается, и мальчик не сможет поиграть.

Более строго ответ можно получить следующим образом. То что мощность системы охлаждения пропорциональна разности температур запишем так:

$$P_{\text{охл}} = \alpha \cdot (T - T_0)$$

здесь T — температура процессора, T_0 — комнатная температура, а α — некоторый неизвестный коэффициент пропорциональности.

Теперь запишем уравнения теплового баланса в случае, когда система охлаждения работает в штатном режиме:

$$P_{\text{уроки}} = \alpha \cdot (T_{\text{у}} - T_0)$$
$$P_{\text{игры}} = \alpha \cdot (T_{\text{и}} - T_0)$$

Когда система охлаждения стала работать хуже, изменился коэффициент пропорциональности (будем называть его $\varkappa$). Значит уравнения теплового баланса после неисправности записываются как:

$$P_{\text{уроки}} = \varkappa \cdot (T'_{\text{у}} - T_0)$$
$$P_{\text{игры}} = \varkappa \cdot (T'_{\text{и}} - T_0)$$

Нагрузка на процессор в каждом из режимов осталась прежней. Приравняем выражения для мощностей до и после поломки:

$$\varkappa \cdot (T'_{\text{у}} - T_0) = \alpha \cdot (T_{\text{у}} - T_0)$$
$$\varkappa \cdot (T'_{\text{и}} - T_0) = \alpha \cdot (T_{\text{и}} - T_0)$$

Выразим из этой системы $T'_{\text{и}}$

$$T'_{\text{и}} = T_0 + (T_{\text{и}} - T_0) \cdot \frac{\alpha}{\varkappa} = T_0 + (T_{\text{и}} - T_0) \cdot \frac{T'_{\text{у}} - T_0}{T_{\text{у}} - T_0}$$

Подставляя значения из условия получаем

$$T'_{\text{и}} = 95°C$$

Значит компьютер перегревается, и мальчик не сможет поиграть.

Задача 2. Светофоры

Будем решать задачу при помощи графика. Нарисуем координатную плоскость $S(t)$, на которой по оси ординат отложена координата вдоль дороги от дома Порфирия, а по оси абсцисс – время от начала его движения. На этой плоскости для каждого светофора отметим промежутки времени, когда на них горит красный свет, они будут иметь вид горизонтальных отрезков (см. рис.).

Так как скорость по условию должна быть постоянна, значит координата машины зависит от времени как:

$$S = vt.$$

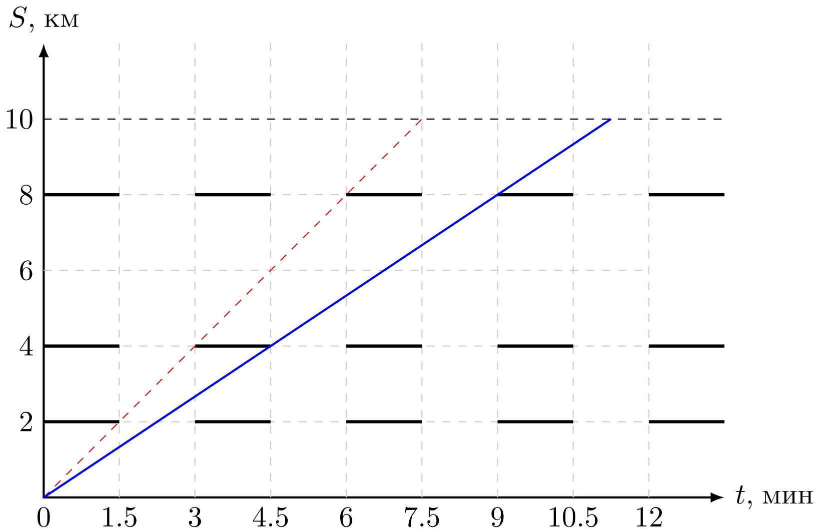
На графике такой зависимости будут соответствовать прямые, проходящие через ноль. Порфирий может проезжать только на зеленый свет, а значит прямая не должна пересекать ни один из проведенных отрезков. Первый возможный вариант отмечен на картинке красным пунктиром, однако он не подходит, так как скорость получается равной

$$v = \frac{8\text{ км}}{6\text{ мин}} = 80\text{ км/ч}$$

Следующий вариант — прямая, проходящая через точку с координатами $(9, 8)$. Скорость на этой прямой получается равной

$$v = \frac{8\text{ км}}{9\text{ мин}} \approx 53\text{ км/ч}$$

Скорости между 80 км/ч и 53 км/ч нам, очевидно, не подходят, так как соответствующие им прямые проходят через отрезок, отвечающий второму светофору.



Эту задачу также можно решить, если для каждого светофора найти диапазон допустимых скоростей в каждом из «просветов». Затем найти минимальную скорость, которая удовлетворяет всем промежуткам.

Задача 3. Голодные игры

С увеличением линейных размеров тела в k раз, его объем возрастает в k^3 раз. Это легко проверить для кубика. Поскольку любую объемную фигуру можно разбить на маленькие кубики, такое же правило выполняется и для тел произвольной формы. Важно только, чтобы при увеличении тело оказалось подобным начальному.

Это же можно понять из соображений размерности. Линейный размер тела определенной формы l имеет размерность **длины**, тогда как объем V имеет размерность **длина**^{3}. Значит, увеличивая линейные размеры тела в k раз, его объем изменится в k^3 раз. Можно записать так $V \sim l^3$.

Для морковки формы конуса линейным размером является ее длина $l_{\text{морковка}}$. Часть морковки, которую съел заяц, начинавший с тонкого конца, имела так же форму конуса, но длину $l_1 = \frac{2}{3} l_{\text{морковка}}$. Исходя из сказанного выше, объем съеденной части тогда равен $V_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot V_{\text{морковка}} = \frac{8}{27} \cdot V_{\text{морковка}}$.

Морковка однородна, значит объемы относятся так же как и массы, поэтому заяц поправился на 8 г морковки.

Задача 4. Шары в воде

Заметим, что раз в воздухе система находится в равновесии, то все силы тяжести по правилу рычага относительно подвеса O уравновешивают друг друга. Значит после того как гантелю погрузят в воду, суммарно все силы тяжести так же не будут вращать систему вокруг шарнира O. Поэтому, записывая правило рычага для погруженной системы, будем учитывать только силу Архимеда. Стержень симметричен, значит сила Архимеда приложена к его середине. То есть плечо силы Архимеда, действующей на тело равно l. Тогда правило рычага выглядит следующим образом:

$$3\rho_{\text{в}} V g \cdot l = \rho_{\text{в}} V_{\text{ст}} g \cdot \frac{1}{2} l + \rho_{\text{в}} V g \cdot 2l.$$

Отсюда выразим объем стержня

$$V_{\text{ст}} = 2V.$$

Задача 5. Танкер

Чтобы сжечь наименьшее количество нефти, добираясь до порта, надо тратить на каждый километр пути минимально возможное количества топлива.

Пусть танкер идет некоторое время Δt со скоростью v, а соответствующий данной скорости расход равен Q_v. Тогда за это время будет потрачена масса топлива:

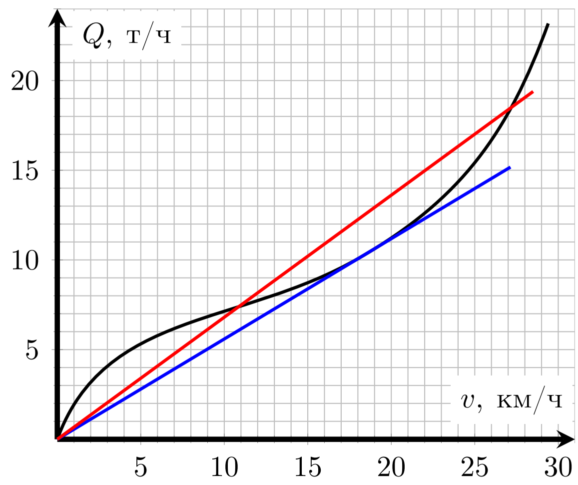
$$\Delta M = Q_v \cdot \Delta t.$$

Пройденное расстояние за это же время равно $\Delta l = v\Delta t$. Значит, расход топлива в пересчете на единицу пройденного пути μ будет равен:

$$\mu = \frac{\Delta M}{\Delta l} = \frac{Q_v\,\Delta t}{v\,\Delta t} = \frac{Q_v}{v}.$$

Таким образом, чтобы определить минимальный расход, надо найти из графика минимальное отношение Q/v.

Чтобы решить задачу графически, представим, что для определенного значения μ_0 мы провели прямую, выходящую из начала координат и проходящую через точку $(1, \mu_0)$ (см. рис.). Несложно понять, что в каждой точке этой прямой соотношение Q/v равно μ_0. Причем, чем меньше μ_0, тем меньше наклон такой прямой. Тогда для решения задачи нам надо найти самую «пологую» прямую, которая имеет общие точки с графиком из условия.



Из рисунка видно, что искомая прямая идет по касательной к графику (синяя линия на рисунке), так как все остальные прямые, пересекающие график и выходящие из нуля, имеют больший наклон (пример: красная линия на рисунке). Теперь из графика найдем расход топлива на единицу пройденного пути

$$\mu \approx 0{,}55 \text{ т/км}$$

Значит, чтобы добраться до порта, придется потратить

$$M \approx 55 \text{ т}$$

Эту задачу также можно решить поиском на графике точки, имеющей минимальное значение Q/v.